Examen 3 . Álgebra lineal 1. Transformaciones lineales y Espacios con producto interior.

Prof. Angel Vázquez Badillo

Resuelva 4 de los siguientes problemas:

1. Sean $f : U \longrightarrow V$ y $g : V \longrightarrow W$ transformaciónes lineales entre espacios vectoriales sobre un campo K tales que $g \circ f$ es un isomorfismo. Demuestre que $V = Imf \oplus Nucg$.

2. Sea V un K-espacio con producto interior definido positivo $<, >$. Sea $A = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ un subconjunto ortogonal de V. Demuestra que A es linealmente independiente.

3. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto punto. Sea $\gamma = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 3)\}$ una base de V. Ortogonaliza la base γ.

4. Sea V un espacio con producto interior sobre $\mathbb{R}$ y sea $\{v_1, ..., v_n\}$ un conjunto de vectores mutuamente ortogonales distintos de cero en V.Sean $a_1, ..., a_n$ numeros reales satisfaciendo$\sum_{i=1}^n a_i = 1$ y sea $w = \sum_{i=1}^n a_i v_i$.Supongamos que $w \perp v_i - v_j \ \forall 1 \leq i \neq j \leq n$.Demostrar que $\|w\|^{-2} = \sum_{i=1}^n \|v_i\|^{-2}$.

5. Sea V un K-espacio con producto interior definido positivo $<, >$. Sean $u, w \in V$. Demuestra que

$$||u + w||^2 + ||u - w||^2 = 2(||u||^2 + ||w||^2)$$

.