Tarea 4 Álgebra lineal 1
Profesor Angel Vázquez Badillo
Valores y vectores propios
Fecha de entrega : 31 Marzo 2017 (Fecha del último parcial).
Resuelva todos los problemas y entreguelos a lo más por parejas.

1. Si λ es un valor propio de $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(F)$.Demostrar las siguientes propiedades:

   a) λ^k es un valor propio de A^k.
   b) λ^k es un valor propio de $c\ A^k$.
   c) $f(\lambda)$ es un valor propio de $f(A)$ con f un polinomio.

2. Se dice que una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(F)$ es nilpotente si $A^k = 0$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Demuestre que si A es nilpotente entonces 0 es un valor propio de A, y es el único valor propio de A.

3. Sea $V = \mathcal{C}(0,1)$ el espacio de las funciones continuas en $(0,1)$ y sea $\alpha : V \longrightarrow V$ definido por:
   $\alpha(f) : x \mapsto \int_0^x cos(\pi[x-t])f(t)dt$ para toda $f \in V$. Encontrar los valores propios de α.

4. Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, es decir el espacio de las funciones continuas de valor real. Sea T el operador lineal sobre V definido por:
   $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$.
   Demostrar que T no tiene valores propios.

5. Sea F un campo y sea n un entero positivo. Sea $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(F)$ matrices que satisfacen $A = B^2$. Sea $p_A(X)$ el polinomio carácteristico de A y sea $q_B(X)$ el polinomio característico de B.Demostrar que $p_A(x^2) = q_B(x)q_B(-x)$.

6. Sea $n \in \mathbb{Z}$ y sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{Q})$. Sean $c_1, c_2, ..., c_n$ los valores propios de A no necesariamente todos distintos considerando a A como una matriz en $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Demostrar que $\sum_{i=1}^n c_i$, $\prod_{i=1}^n c_i \in \mathbb{Q}$ (es decir la suma y el producto de todos los valores propios es racional).

7. Sea $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ una matriz con valores propios distintos a, b $(a \neq b)$. Demostrar que $\forall n > 0$
   $A^n = \frac{a^n}{a-b}(A - bI) + \frac{b^n}{b-a}(A - aI)$
   Con I la matriz identidad en $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

8. Sea $P \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la cadena de Markov de dos estados definida como sigue:

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

   con $a, b \in (0,1)$. Calcular los valores propios y vectores propios de P.